ÜBER DIE ELASTISCHE DEFORMATION EINES KREISFÖRMIGEN RINGS.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER

HOHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN

VORGELEGT

von

THEODOR WEITBRECHT
AUS BLAUBEUREN.

LEIPZIG 1906.
DRUCK von B. G. TEUBNER.

ÜBER DIE ELASTISCHE DEFORMATION EINES KREISFÖRMIGEN RINGS.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER

HOHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN

VORGELEGT

von

THEODOR WEITBRECHT
AUS BLAUBEUREN.

AMA D.
LUDWIGSBURG

LEIPZIG 1906.
DRUCK von B. G. TEUBNER.

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät angenommen am

15. Mai 1906.

Sonderabdruck aus Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 52. Band. 1905. 4. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Über die elastische Deformation eines kreisförmigen Rings.

Von Th. Weitbrecht in Tübingen.

Ein kreisförmiger Ring, dessen Querschnitt gegenüber seinem Radius sehr klein und zur Mittelebene des Rings symmetrisch sein möge, werde von Kräften angegriffen, die in dieser Ebene wirken. Das Material des Rings setzen wir als homogen voraus. Das Problem ist damit auf ein ebenes beschränkt. An einem solchen Ring denken wir uns, gleichförmig verteilt, zahlreiche homogene radiale Zugstangen angebracht, die auf einer Nabe im Mittelpunkt aufsitzen und in einen Zustand der Spannung versetzt sind, so daß der Ring nach ihrer Anspannung einen etwas kleineren Radius erhält, als in seinem natürlichen Zustand. Die Anzahl der Zugstangen wollen wir so groß annehmen, daß sich die Summe ihrer Wirkungen auf ein endliches Stück des Rings durch das Integral über ein diesem Ringstück entsprechendes

Intervall ersetzen läßt. Diese gespannten Zugstangen, die sich bei der Deformation des Rings verlängern bezw. verkürzen, bedingen einen gewissen Zustand der Starrheit des ganzen Systems, so daß nur kleine Deformationen desselben in Betracht zu ziehen sind. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Verlängerungen und Verkürzungen der Zugstangen in dem Ring selbst beträchtliche Kräfte hervorrufen, welche Komponenten in der Richtung der Tangente an die kreisförmige Achse des Rings besitzen. Sie veranlassen Längenänderungen der Achse, die gegenüber der geringen Änderung der Krümmung nicht von vornherein zu vernachlässigen sind. Man darf daher auf das vorliegende Problem nicht ohne weiteres die gewöhnlichen Biegungsformeln für gekrümmte Stäbe anwenden. Wohl aber sind gewisse zuerst von Winkler[1]) für gekrümmte Stäbe angegebene Beziehungen zwischen den in einem Querschnitt wirkenden Kräften und den Formänderungen, die sie hervorrufen, auch auf unser Problem anwendbar. Diese Formeln dienen zur Herstellung der Differentialgleichungen für die Verschiebungsgrößen der Punkte der Ringachse. Wir werden diese zunächst für den Fall ermitteln, daß der Kreisring an den Endpunkten eines Durchmessers von zwei gleich großen in der Richtung nach dem Mittelpunkt wirkenden Kräften angegriffen wird. Dann werden wir den Fall untersuchen, daß ein Druck von der Nabe aus nach einem festgehaltenen Punkt der Peripherie hin wirkt, so daß der Ring in derselben Weise beansprucht wird, wie etwa ein Fahrrad beim Gebrauch.

Das Nachfolgende ist die Umarbeitung einer Preisschrift, welche 1904 der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen vorgelegt war; meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor von Brill, sage ich meinen herzlichsten Dank für die mannigfaltige Anregung und Förderung, die ich von seiner Seite erfahren durfte.

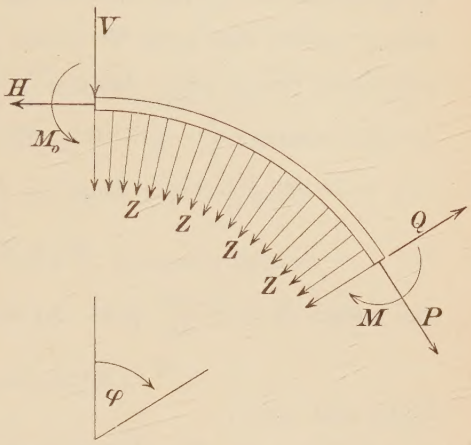
§ 1. Herleitung der Differentialgleichungen.

Der Mittelpunkt des Kreisrings sei der Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems (r, φ); $\varphi = 0$ entspreche dem obersten Punkt der Ringachse, φ wachse im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers. Wir denken uns, nachdem durch äußere Kräfte, die etwa im Zentrum oder an der Peripherie wirken, die Deformation eingetreten ist, aus dem aus Ring und Zugstangen bestehenden System durch zwei Querschnitte an der Stelle $\varphi = 0$ und an der beliebigen Stelle φ ein endliches Ringstück mit Teilen der daran befestigten Zugstangen herausgeschnitten; die vor dem Durchschneiden an den durchschnittenen Stellen wirkenden Drucke

1) Winkler, Elastizität und Festigkeit § 283.

ersetzen wir durch Kräfte, die in den Schwerpunkten der nun frei gewordenen Querschnitte angreifen, und durch Kräftepaare, welche die Krümmung der Ringachse an diesen Stellen zu vergrößern streben.

An dem Querschnitt bei $\varphi = 0$ bringen wir eine nach dem Mittelpunkt gerichtete Kraft V an; senkrecht zu ihr, in der Richtung der Ringachse, den horizontalen Zug H, dazu ein Kräftepaar M_0. An dem Querschnitt in φ wirke in der Richtung der Tangente an die Ringachse der Zug P, senkrecht dazu die Kraft Q, und das Kräftepaar M. Die Deformation eines an der Stelle φ befindlichen Ringelements, das wir uns durch zwei senkrecht auf der Ringachse stehende, einen sehr kleinen Winkel einschließende Ebenen begrenzt denken, hängt ab von den an dieser Stelle wirkenden Kräften P und Q und dem Kräftepaar M; der Einfluß der an dem Element angebrachten Zugstangen auf die Deformation ist gegen die Wirkung von P, Q und M zu vernachlässigen. Nach dem Vorgang von Kirchhoff[1]) wollen wir statt des gekrümmten Ringelements das eines ursprünglich zylindrischen Stabes untersuchen, und an der gefundenen Formel nachträglich eine der ursprünglichen Krümmung des Rings entsprechende Veränderung anbringen.



P ist die Resultante der zur Ringachse parallel wirkenden Spannungen N der zur Achse parallelen Fasern pro Flächeneinheit des Querschnitts φ. Da das Hookesche Gesetz gilt, so setzen wir

$$N = E\frac{\Delta ds_y}{ds};$$

dabei bedeutet $\frac{\Delta ds_y}{ds}$ die Verlängerung der betrachteten Faser pro Längeneinheit, y ihren Abstand von einer zur Ringebene senkrechten, die Achse des Elements enthaltenden Ebene, wo die y von der Innennach der Außenseite des Rings wachsen mögen, E den Elastizitätsmodul des Rings. Ferner gilt bei sehr kleinen Querschnitten die Beziehung[2])

$$\text{(A)} \qquad \frac{\Delta ds_y}{ds} = \frac{\triangle ds}{ds} + \frac{y}{\varrho},$$

1) Kirchhoff, Mechanik, 28. Vorl. § 2 a. E.

2) Grashof, Elast. u. Festk. Nr. 36. Winkler, § 283.

wo $\frac{\triangle ds}{ds}$ die relative Verlängerung der Achse, $\frac{1}{\varrho}$ ihre Krümmung nach der Deformation bedeutet. Diese Formel drückt aus, daß die Längsänderungen der Fasern so vor sich gehen, als ob ursprünglich ebene Querschnitte bei der Deformation eben blieben. Man geht zu einem Ring mit der ursprünglichen Krümmung $\frac{1}{r}$ über, indem man die Annahme macht, daß auch für diesen jede zur Achse parallele Faser für sich jenem Gesetz folgt, daß also nur an die Stelle von $\frac{1}{\varrho}$ die *Änderung* der Krümmung, $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}$ tritt[1]), für die man $\frac{\Delta d\varphi}{ds}$ setzen kann, wo $r\,d\varphi = ds$ ist. Für einen Ring von der ursprünglichen Krümmung $\frac{1}{r}$ ist

$$ds_y = ds\frac{r+y}{r}$$

und wegen $N = E\frac{\Delta ds_y}{ds_y}$ geht (A) dann über in

$$N = E\left(\frac{\Delta ds}{ds} + y\frac{\Delta d\varphi}{ds}\right)\frac{r}{r+y}.$$

Bildet man nun[2])

$$P = \int N df \quad \text{und} \quad M = \int N y df,$$

wo df ein Element des Querschnitts bedeutet und die Integration sich über den ganzen Querschnitt erstreckt, und berücksichtigt man dabei, daß die Achse des Ringelements durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht, sowie daß y klein gegen r ist, so erhält man, wenn man die so entstehenden Gleichungen nach $\frac{\Delta ds}{ds}$ und $\frac{\Delta d\varphi}{ds}$ auflöst und dabei

$$\int df = F, \quad \int y^2 df = W$$

setzt:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\Delta ds}{ds} &= \frac{P}{EF} + \frac{M}{EFr}, \\ \frac{\Delta d\varphi}{ds} &= \frac{P}{EFr} + \frac{M}{EFr^2} + \frac{M}{EW}. \end{aligned}$$

Dies sind die Winklerschen Formeln.[3]) Sie verwandeln sich in die Differentialgleichungen des Problems, indem man für s, φ Polarkoordinaten und für P, M die der Annahme über die Zugstangen und die äußeren Kräfte entsprechenden Werte einsetzt.

Die Ringachse denken wir uns zunächst durch die Zugstangen gespannt, aber immer noch kreisförmig. Ein Punkt derselben, (r, φ),

1) Kirchhoff l. c. 2) Winkler, § 63.
3) Winkler, § 283; Grashof Nr. 168.

werde dann durch die Deformation an den Ort $\left(r+q,\ \varphi+\frac{p}{r}\right)$ versetzt, so daß also q die Zunahme des Radius Vektor, $\frac{p}{r}$ die Zunahme des Winkels φ bedeutet. Die Deformation des Rings ist vollkommen beschrieben, wenn p und q als Funktionen von φ bekannt sind. Zunächst sind also die linken Seiten der Gleichungen (1) als Funktionen von p, q und φ auszudrücken. Nennt man die Bogenlänge der undeformierten (aber gespannten) Achse des Rings s, die der deformierten s', von $\varphi = 0$ an gerechnet, so läßt sich mit Vernachlässigung von Ausdrücken zweiter Ordnung in p und q und ihren Ableitungen nach φ setzen

$$\Delta ds = (r+q)\,d\left(\varphi+\frac{p}{r}\right) - r\,d\varphi = q\,d\varphi + p'\,d\varphi,$$

wo der Akzent eine Differentiation nach φ bedeutet; hieraus

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{q+p'}{r}. \tag{2}$$

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{p'-q''}{r^2} \tag{3}$$

ist.

Weiter sind die Größen P und M als Funktionen des Winkels φ und gewisser Konstanten (Belastung, ursprünglicher Spannung, Abmessungen und Materialkonstanten des Rings) auszudrücken.

Die Zugstangen denken wir uns, bevor die äußeren Kräfte angebracht werden, also vor Eintritt der Deformation, bereits in gespanntem Zustand derart, daß sie (senkrecht) auf die Längeneinheit der Ringachse den Zug Z_0 ausüben, während der hierdurch in der Richtung der Längsachse des Ringes hervorgerufene Gesamtdruck P_1 sein möge. Es ist nun leicht zu sehen, daß

$$P_1 = -Z_0 r$$

ist. Ein durch die Querschnitte $-\varphi$ und $+\varphi$ begrenztes Stück des Rings nämlich ist in diesem gespannten Zustand nur dann im Gleichgewicht, wenn

$$2P_1 \sin\varphi = -\int_{-\varphi}^{+\varphi} Z_0 \cos\varphi\, r\, d\varphi = -2Z_0 \sin\varphi \cdot r$$

ist. Der gesamte Druck P' an einer Stelle φ nach der Deformation setzt sich zusammen aus P_1 und dem durch die Deformation hervorgerufenen Druck P, sodaß man hat

$$P' = P + P_1.$$

Da die Deformation des Rings als sehr klein vorausgesetzt wird, so werden die Kräfte Z, welche die Zugstangen auf den Ring ausüben, auch nach der Deformation noch senkrecht auf den Ringelementen stehen und den Verlängerungen der Zugstangen proportional sein, sodaß man hat

$$Z = Z_0 + aq.$$

Die Bedeutung der Größe a ergibt sich folgendermaßen. Der Ring werde dadurch in den gespannten Zustand versetzt, daß die Speichen, die ursprünglich, vom Mittelpunkt des Rings aus gerechnet, die Länge $r_2 < r$ besaßen, an dem Ring mit dem ursprünglichen Radius $r_1 > r$ befestigt wurden, wobei sie sich sämtlich auf die Länge r verlängerten, während sich der Ring zusammenzog. Die Nabe im Mittelpunkt des Rings habe den Radius ϱ, der Ringquerschnitt bilde etwa ein Quadrat von der Seitenlänge b, derjenige der Zugstangen sei ein schmales Rechteck, dessen größere Seite ebenfalls die Länge b haben möge. Nennt man nun den Querschnitt einer Zugstange m, die Anzahl der an der Längeneinheit der Peripherie angreifenden Zugstangen n, und denkt man sich dieselben auf der Nabe so befestigt, daß sich je zwei längs der Seite b berühren, so hat man, wenn E_1 der Elastizitätsmodul der Zugstangen ist,

$$Z_0 = m \cdot n \cdot E_1 \frac{r - r_2}{r_2 - \varrho}.$$

Werden nun äußere Kräfte angebracht, so erfolgt eine Deformation des Rings, durch welche Z_0 in Z, r in $r + q$ und n in $\frac{n \cdot r}{r + q}$ oder, da q gegen r sehr klein ist, wieder in n übergeht, und man hat aus

$$Z = Z_0 + aq,$$

$$a = \frac{m \cdot n \cdot E_1}{r_2 - \varrho}.$$

Nun ist $\frac{m}{b} \cdot n = \frac{\varrho}{r}$, daher $a = \frac{\varrho \cdot E_1 \cdot b}{r(r_2 - \varrho)}$.

Setzt man jetzt die Kräfte, die an dem von den Querschnitten $\varphi = 0$ und φ begrenzten Ringstück und an den (stetig verteilt gedachten) Speichen wirken, ins Gleichgewicht, zuerst hinsichtlich der Richtung P', so erhält man

$$P' + V \sin\varphi - H \cos\varphi + \int_0^{\varphi} Z \sin(\varphi - \psi) r d\psi = 0,$$

wo ψ einen veränderlichen Winkel zwischen 0 und φ bedeutet. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$P_1 = - Z_0 r,$$

sowie auf die Beziehungen

$$P' = P_1 + P \quad \text{und} \quad Z = Z_0 + aq$$

wird

$$P = H\cos\varphi - V\sin\varphi + Z_0 r\cos\varphi + ar\cos\varphi\int_0^\varphi q\sin\varphi\,d\varphi$$

(4)

$$- ar\sin\varphi\int_0^\varphi q\cos\varphi\,d\varphi.$$

Die Gleichsetzung der Momente ergibt

$$M = M_0 + Vr\sin\varphi + Hr(1-\cos\varphi) + \int_0^\varphi Zr^2 d\psi\sin(\varphi-\psi),$$

oder

$$M = M_0 + Vr\sin\varphi + Hr(1-\cos\varphi) + Z_0 r^2(1-\cos\varphi)$$

$$+ ar^2\left[\sin\varphi\int_0^\varphi q\cos\varphi\,d\varphi - \cos\varphi\int_0^\varphi q\sin\varphi\,d\varphi\right].$$

Mit Hilfe der in (4) und (5) angegebenen Werte von P und M ergibt sich aus (1) und (2)

$$(q+p')EF = M_0 + Hr + Z_0 r^2. \tag{6}$$

Multiplizieren wir die Gleichung (3) mit r und subtrahieren sie von (2), so erhalten wir mit Rücksicht auf (1)

$$(q+q'')EW = -Mr^2.$$

Differenziert man diese Gleichung zweimal nach φ und addiert, so erhält man mit Rücksicht auf (5)

$$(q+2q''+q^{\mathrm{IV}})\frac{EW}{r^2} = -(M_0 + Hr + Z_0 r^2 + ar^2 q),$$

und hieraus, wenn man

$$\frac{ar^4}{EW} + 1 = a_1$$

setzt, durch nochmalige Differentiation

$$a_1 q' + 2q''' + q^{\mathrm{V}} = 0. \tag{7}$$

Aus dieser Differentialgleichung und den Gleichungen (5) und (6) lassen sich p und q als Funktionen von φ berechnen. Sie gilt für jede Deformation eines mit gespannten Zugstangen versehenen Rings; wenn an mehreren Stellen äußere Kräfte angreifen, so ist sie für jedes freie Ringstück besonders anzusetzen. Dem Fall, daß keine Zugstangen wirken, entspricht $a_1 = 1$. In diesem Fall wird die Längenänderung

der Achse außerordentlich klein sein; setzt man also in (2) $\Delta ds = 0$, so wird

$$q = -p',$$

und (7) geht über in

$$p'' + 2p^{IV} + p^{VI} = 0.$$

Diese einem Reif *ohne* Zugstangen entsprechende Differentialgleichung hat schon Herr Lamb[1]) aufgestellt und behandelt.

§ 2. Erste Anwendung.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall, daß der Ring in den Punkten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ von zwei gleich großen entgegengesetzt gerichteten radialen Drucken $2V$ angegriffen wird. Dann ist

$$q_0' = 0; \quad q_{\frac{\pi}{2}}' = 0; \quad q_\pi' = 0;$$

$$p_0 = 0; \quad p_{\frac{\pi}{2}} = 0; \quad p_\pi = 0.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$q' = e^{t\varphi}$$

erhält man zunächst aus (7)

$$t = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{-\frac{ar^4}{EW}}};$$

setzt man $\sqrt{-1 + i\sqrt{\frac{ar^4}{EW}}} = \alpha + i\beta$, so kommt

$$\alpha^2 - \beta^2 = -1; \quad 2\alpha\beta = \sqrt{\frac{ar^4}{EW}} \tag{8}$$

und hieraus

$$\alpha = \sqrt{-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{ar^4}{4EW} + \frac{EW}{4}}}; \quad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{ar^4}{4EW} + \frac{EW}{4}}}.$$

Die vier Werte von t sind

$$t_1 = \alpha + i\beta; \quad t_2 = \alpha - i\beta; \quad t_3 = -\alpha + i\beta; \quad t_4 = -\alpha - i\beta.$$

Dem Fall eines von Zugstangen *freien* Rings entspricht $\alpha = 0$. Dann werden je zwei Werte von t einander gleich. Um trotzdem die nötige Zahl von Konstanten zu erhalten, setzen wir

$$q' = e^{\alpha\varphi}(c \cdot e^{i\beta\varphi} + d \cdot e^{-i\beta\varphi}) + \frac{e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi}}{2\alpha}(f \cdot e^{i\beta\varphi} + g \cdot e^{-i\beta\varphi}),$$

wo c, d, f und g willkürliche Konstanten sind. Wegen $q_0' = 0$ ergibt sich hieraus mit Hilfe neuer Konstanten A, C, D:

$$q' = A \cdot e^{\alpha\varphi}\sin\beta\varphi + \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi}{\alpha}[C\cos\beta\varphi + D\sin\beta\varphi], \tag{9}$$

1) Proc. Lond. Math. Soc. XIX, 1888, pag. 369 f.

und hieraus wegen $q'_{\frac{\pi}{2}} = 0$ und $q'_{\pi} = 0$

$$C = -\frac{A \cdot \alpha \sin \beta\pi}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}; \quad D = \frac{A \cdot \alpha (\cos \beta\pi - e^{\alpha\pi})}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha^2 + \beta^2 = t^2 \quad \text{und} \quad \alpha = t \cos \tau;\ \beta = t \sin \tau,$$

und berücksichtigt, daß

$$\int e^{\alpha\varphi} \sin \beta\varphi\, d\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \sin (\beta\varphi - \tau)$$

und

$$\int e^{\alpha\varphi} \cos \beta\varphi\, d\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \cos (\beta\varphi - \tau)$$

ist, so erhält man durch Integration von (9)

$$\begin{aligned} q = {} & A \frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \sin (\beta\varphi - \tau) + \frac{C}{\alpha t^2} (\alpha \cos \beta\varphi\, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi + \beta \sin \beta\varphi\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi) \\ & + \frac{D}{\alpha t^2} (\alpha \sin \beta\varphi\, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi - \beta \cos \beta\varphi\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi) + C', \end{aligned} \tag{11}$$

wo C' eine noch zu bestimmende Integrationskonstante bedeutet. Dieser Ausdruck geht mit Hilfe von Beziehungen wie:

$$\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi \cdot e^{\alpha(\pi - \varphi)} - \mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) \cdot e^{\alpha\pi} = -\mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi$$

in die Form über

$$\begin{aligned} q = {} & \frac{-A}{t^2\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi} [\alpha (\sin \beta\varphi\, \mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) + \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi \sin \beta(\pi - \varphi)) \\ & + \beta (\mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi \cos \beta(\pi - \varphi) + \cos \beta\varphi\, \mathfrak{Sin}\, \alpha(\pi - \varphi))] + C'. \end{aligned} \tag{11a}$$

Für p finden wir mit Rücksicht auf (6)

$$p = \frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF} \varphi - \int q\, d\varphi - \frac{2 D' \alpha\beta}{t^4},$$

wo D' eine neue Konstante bedeutet. Diese bestimmt sich mit Rücksicht auf $p_0 = 0$, sowie auf (10) und (11) zu:

$$D' = A \frac{\cos \beta\pi - \mathfrak{Cof}\, \alpha\pi}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}.$$

Mit Hilfe derselben Beziehungen, welche auf Gleichung (11a) führten, erhält nun p die Form

$$\begin{aligned} p = {} & \left(\frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF} - C'\right) \varphi - \frac{2 A \alpha\beta}{t^4\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi} (\cos \beta\pi - \mathfrak{Cof}\, \alpha\pi) \\ & - \frac{A}{t^2\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi} \Big[\frac{2\alpha\beta}{t^2} (\mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) \cos \beta\varphi - \cos \beta(\pi - \varphi)\, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi) \\ & - \mathfrak{Sin}\, \alpha(\pi - \varphi) \sin \beta\varphi + \sin \beta(\pi - \varphi)\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi\Big], \end{aligned} \tag{12}$$

wo die Konstanten M_0, H, C', A noch zu bestimmen sind. Die Bedingungen $p_{\frac{\pi}{2}} = 0$ und $p_\pi = 0$ führen beide auf die Gleichung

$$(13) \quad \left(\frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF} - C'\right)\pi + \frac{4\alpha\beta A}{t^4 \operatorname{Sin} \alpha\pi}(\operatorname{Cof} \alpha\pi - \cos\beta\pi) = 0.$$

Bildet man die Gleichung

$$(q + q'')EW = -Mr^2$$

für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pi$, so erhält man

$$(14) \quad -M_0 = C'\frac{EW}{r^2} + \frac{2A \cdot \alpha\beta \cdot EW}{t^2 \quad r^2} \cdot \frac{\alpha \operatorname{Sin} \alpha\pi - \beta \sin\beta\pi}{\operatorname{Sin} \alpha\pi}.$$

Berücksichtigt man weiter, daß

$$q_0 = q_\pi \quad \text{und} \quad q_0'' = q_\pi'' \text{ ist,}$$

und subtrahiert man die eine der beiden für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ gebildeten Gleichungen von der andern, so kommt

$$(15) \quad 2H + 2Z_0 r + ar\int_0^\pi q \sin\varphi\, d\varphi = 0.$$

Da

$$\int_0^\pi q \sin\varphi\, d\varphi = q_\pi + q_0 + \int_0^\pi q' \cos\varphi\, d\varphi$$

ist, so ist zunächst das Integral

$$\int_0^\pi q' \cos\varphi\, d\varphi$$

zu berechnen. Zu dem Zweck führen wir die Bezeichnungen ein

$$\int e^{\alpha\varphi} \sin\beta\varphi \sin\varphi\, d\varphi = X,$$

$$\int e^{\alpha\varphi} \sin\beta\varphi \cos\varphi\, d\varphi = Y,$$

$$\int e^{\alpha\varphi} \cos\beta\varphi \sin\varphi\, d\varphi = X',$$

$$\int e^{\alpha\varphi} \cos\beta\varphi \cos\varphi\, d\varphi = Y',$$

$$\int e^{\alpha\varphi} \sin\beta\varphi\, d\varphi = U,$$

$$\int e^{\alpha\varphi} \cos\beta\varphi\, d\varphi = U',$$

wo

$$U = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t}\sin(\beta\varphi - \tau),$$

$$U' = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t}\cos(\beta\varphi - \tau)$$

ist. Durch partielle Integration der Ausdrücke X bis Y' erhalten wir Beziehungen wie:

$$X = U\sin\varphi - \int U\cos\varphi\, d\varphi,$$

welche auf die Relationen führen:

$$\begin{aligned}
X \quad &+\frac{\alpha}{t^2}Y \quad &&-\frac{\beta}{t^2}Y' &&= U\sin\varphi\\
-\frac{\alpha}{t^2}X \quad &+Y \quad &+\frac{\beta}{t^2}X' \quad &&&= U\cos\varphi\\
&\frac{\beta}{t^2}Y \quad &+X' \quad &+\frac{\alpha}{t^2}Y' &&= U'\sin\varphi\\
-\frac{\beta}{t^2}X \quad &&-\frac{\alpha}{t^2}X' \quad &+Y' &&= U'\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich mit Rücksicht auf (8)

$$\begin{aligned}
X &= U\sin\varphi - U\cos\varphi\,\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} + \frac{U'\sin\varphi}{2\alpha\beta} + \frac{U'\cos\varphi}{2\beta};\\
Y &= U\cos\varphi + U\sin\varphi\,\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} + \frac{U'\cos\varphi}{2\alpha\beta} - \frac{U'\sin\varphi}{2\beta};\\
X' &= U'\sin\varphi - U'\cos\varphi\,\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} - \frac{U\sin\varphi}{2\alpha\beta} - \frac{U\cos\varphi}{2\beta};\\
Y' &= U'\cos\varphi + U'\sin\varphi\,\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} - \frac{U\cos\varphi}{2\alpha\beta} + \frac{U\sin\varphi}{2\beta}.
\end{aligned}$$

Nun läßt sich $\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$ in der Form schreiben

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi = A[Y]_0^\pi + \frac{C}{2\alpha}[Y']_0^\pi - \frac{C}{2\alpha}[Y'_{-\alpha}]_0^\pi + \frac{D}{2\alpha}[Y]_0^\pi - \frac{D}{2\alpha}[Y_{-\alpha}]_0^\pi,$$

wo der Index $-\alpha$ bedeutet: gebildet für $-\alpha$ statt für α, und die eckigen Klammern mit den angesetzten Grenzen die Differenzen für die obere und untere Grenze bedeuten. Berechnet man diese aus den angegebenen Ausdrücken, so erhält man mit Rücksicht auf (10) den einfachen Ausdruck

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi = \frac{A}{\alpha\beta\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi}(\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi + \beta\sin\beta\pi).$$

Gleichung (15) erhält daher die Form

$$H = -Z_0 r - ar(A\lambda + C'), \tag{15a}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\beta \sin \beta\pi - \alpha \operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\pi}{2\alpha\beta t^2 \operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\pi} = \lambda$$

gesetzt wurde.

Andererseits findet sich durch Elimination von M_0 aus (13) und (14)

$$H = -Z_0 r - A\mu + C'\left(\frac{EW}{r} + \frac{EF}{r}\right), \tag{16}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{4\alpha\beta EF}{\pi r t^4 \operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\pi}(\operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha\pi - \cos\beta\pi) - \frac{2\alpha\beta EW}{r^3 t^2 \operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\pi}(\alpha \operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\pi - \beta \sin\beta\pi) = \mu$$

gesetzt wurde. Die Elimination von H aus (15a) und (16) liefert

$$C' = \frac{Ar^3(\mu - ar\lambda)}{ar^4 + EW + EFr^2} = \frac{4\alpha\beta r^2 EFA(\operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha\pi - \cos\beta\pi)}{(ar^4 + EW + r^2 EF)\pi t^4 \operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\pi}.$$

Es ist noch A als Funktion von V zu bestimmen. Aus der Gleichung

$$(q + q'')EW = -Mr^2$$

folgt mit Rücksicht auf $q_0' = 0$

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)_{\varphi=0} = -q_0''' \cdot \frac{EW}{r^3};$$

nun findet man aber aus (5)

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)_{\varphi=0} = V,$$

ferner ist nach (9) mit Rücksicht auf (10)

$$q_0''' = 2\alpha\beta A \frac{\cos\beta\pi - \operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha\pi}{\operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\pi},$$

daher

$$A = \frac{Vr^3}{2EW\alpha\beta} \cdot \frac{\operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\pi}{\operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha\pi - \cos\beta\pi}.$$

Die Größen p und q stellen sich somit folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} q = {} & \frac{Vr^3}{EWt^2}\Big\{\frac{1}{2\alpha\beta(\cos\beta\pi - \operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha\pi)}[\alpha(\sin\beta\varphi \operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha(\pi - \varphi) + \operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha\varphi \sin\beta(\pi - \varphi)) \\ & + \beta(\operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\varphi \cos\beta(\pi - \varphi) + \cos\beta\varphi \operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha(\pi - \varphi))] + \frac{EFr^2}{(ar^4 + EW + EFr^2)\pi t^2}\Big\} \\ p = {} & \frac{Vr^3}{EWt^4}\Big\{\frac{1}{2\alpha\beta(\cos\beta\pi - \operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha\pi)}[2\alpha\beta(\operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha(\pi - \varphi)\cos\beta\varphi - \cos\beta(\pi - \varphi)\operatorname{\mathfrak{Cof}} \alpha\varphi) \\ & - t^2(\operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha(\pi - \varphi)\sin\beta\varphi - \sin\beta(\pi - \varphi)\operatorname{\mathfrak{Sin}} \alpha\varphi)] - \frac{2\varphi}{\pi} + 1\Big\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Da die Gleichungen (4) und (5) nur für ein Ringstück gelten, an dem außer V keine äußeren Kräfte angreifen, so gelten auch die gefundenen Ausdrücke für p und q nur für Werte von φ zwischen 0 und π. Offenbar aber würde man für die Deformation des andern Halbrings genau dieselben Ausdrücke in ψ erhalten, wenn man $\varphi - \pi = \psi$ setzte, also den Anfangsradius nach $\varphi = \pi$ legte. Die Größen p und q für Werte von φ zwischen π und 2π gehen also aus (17) hervor durch Vertauschung von φ mit $\varphi - \pi$.

Daß die Ausdrücke (17) als Funktionen von φ nicht die Periode 2π besitzen, ist ein Mangel, den sie bekanntlich mit den Lösungen aller derjenigen elastischen Probleme teilen, welche diskontinuierlich wirkende endliche Kräfte, wie hier die auf die Peripherie wirkende Angriffskraft $2V$, voraussetzen.[1]) Die Diskontinuität, die an den Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ auftritt[2]), macht sich übrigens erst bei q''' und p^{IV} bemerklich. Es wird

$$[q''']_{2\pi}^{0} = -\frac{2Vr^3}{EW} \quad \text{und} \quad [p^{\mathrm{IV}}]_{2\pi}^{0} = +\frac{2Vr^3}{EW}.$$

§ 3. Zweite Anwendung.

Wir behandeln noch die Deformation eines Rings, auf den im Punkte $\varphi = 0$ eine Last $2V$ gegen die Nabe hin drückt, während diese festgehalten wird und keine weiteren Kräfte angreifen.

Weil wieder

$$q_0' = 0$$

ist, wird:

$$q' = A \cdot e^{\alpha\varphi} \sin\beta\varphi + \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi}{\alpha}\,[C\cos\beta\varphi + D\sin\beta\varphi].$$

Statt $q_{\frac{\pi}{2}}' = 0$ und $q_\pi' = 0$ hat man jetzt

$$q_\pi' = 0 \quad \text{und} \quad q_{2\pi}' = 0,$$

und es wird

$$C = \frac{-A\cdot\alpha\sin 2\beta\pi}{\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}; \qquad D = \frac{A\alpha\,(\cos 2\beta\pi - e^{2\alpha\pi})}{\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}.$$

Mit Rücksicht auf diese Werte erhält man

$$q = \frac{-A}{t^2\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}\,[\alpha\,(\sin\beta\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\alpha(2\pi-\varphi) + \mathfrak{Cof}\,\alpha\varphi\sin\beta(2\pi-\varphi))$$
$$+ \beta\,(\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi\cos\beta(2\pi-\varphi) + \cos\beta\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(2\pi-\varphi))] + C',$$

wo C' noch zu bestimmen ist. Ferner ergibt sich aus

$$p = \frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF}\,\varphi - \int q\,d\varphi - \frac{2D'\alpha\beta}{t^4}$$

1) cfr. z. B. Love, treatise on the theory of elasticity II, arts. 219 f.

2) cfr. Grashof, Nr. 48.

wegen $p_0 = 0$

$$D' = A \frac{\cos 2\beta\pi - \mathfrak{Cof}\, 2\alpha\pi}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}.$$

Die Bedingungen

$$p_\pi = 0 \quad \text{und} \quad p_{2\pi} = 0$$

führen beide zu der Gleichung

$$\left(\frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF} - C'\right)\pi - \frac{2D'\alpha\beta}{t^4} = 0. \tag{18}$$

Zur Bestimmung der Konstanten M_0, H, C' und A bilde man wie beim vorigen Problem die Gleichung

$$(q + q'')EW = -Mr^2$$

für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pi$. Berechnet man mit Hilfe der für q' und q gefundenen Ausdrücke die Größen q_0, q_0'', q_π und q_π'', so erhält man für $\varphi = 0$

$$C' - \frac{2\alpha\beta}{t^2\, \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi} A(\beta \sin 2\beta\pi - \alpha\, \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi) = -\frac{M_0 r^2}{EW} \tag{19}$$

und für $\varphi = \pi$

$$-(q_\pi + q_\pi'')\frac{EW}{r^2} = M_0 + 2Hr + 2Z_0 r^2 + ar^2 \int_0^\pi q \sin\varphi\, d\varphi. \tag{20}$$

Da nun

$$\int_0^\pi q \sin\varphi\, d\varphi = q_\pi + q_0 + \int_0^\pi q' \cos\varphi\, d\varphi$$

ist, so haben wir zunächst das Integral

$$\int_0^\pi q' \cos\varphi\, d\varphi$$

zu berechnen. Wir verfahren so wie im vorigen Fall und erhalten mit Benutzung der Werte von C und D

$$\int_0^\pi q' \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{A}{\alpha\beta\, \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}[\beta \sin\beta\pi\, \mathfrak{Cof}\, \alpha\pi + \alpha\cos\beta\pi\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi + \tfrac{1}{2}(\alpha\, \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi + \beta \sin 2\beta\pi)].$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$4EW \cdot \alpha^2\beta^2 = ar^4$$

geht nun Gleichung (20) über in

$$M_0 + 2Hr + 2Z_0 r^2 + C' \frac{2\alpha r^4 + EW}{r^2} + \frac{A\alpha r^2}{2\alpha\beta t^2 \operatorname{Sin} 2\alpha\pi} (\beta \sin 2\beta\pi - \alpha \operatorname{Sin} 2\alpha\pi) = 0. \tag{20a}$$

Aus (18) findet man

$$H = \left(A\frac{\lambda}{\pi} + C'\right)\frac{EF}{r} - \frac{M_0}{r} - Z_0 r,$$

wo zur Abkürzung

$$\lambda = \frac{2\alpha\beta}{t^4 \operatorname{Sin} 2\alpha\pi} (\cos 2\beta\pi - \operatorname{Cof} 2\alpha\pi)$$

gesetzt wurde. Trägt man H in (20a) ein und eliminiert M_0 aus (20a) und (19), so erhält man

$$C' = \frac{2\alpha\beta r^2 EFA (\operatorname{Cof} 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi)}{(\alpha r^4 + EW + r^2 EF)\pi t^4 \operatorname{Sin} 2\alpha\pi}.$$

Zur Bestimmung von A bilden wir wieder

$$-q_0''' \frac{EW}{r^3} = V$$

und finden

$$A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW} \cdot \frac{\operatorname{Sin} 2\alpha\pi}{\operatorname{Cof} 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi}.$$

Man erhält schließlich für p und q Ausdrücke, die aus den entsprechenden Ausdrücken (17) dadurch hervorgehen, daß man 2π an die Stelle von π setzt.

§ 4. Diskussion der Resultate.

Um ein Bild von den Deformationen unserer Kreisringe zu gewinnen, und um den Einfluß der Zugstangen beurteilen zu können, wollen wir zunächst die Resultate des § 2 auf den Fall anwenden, daß keine Zugstangen vorhanden sind. In diesem Falle ist

$$Z_0 = 0; \quad a = 0; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1,$$

und man erhält nach Ausführung einiger einfacher Grenzübergänge für $0 < \varphi < \pi$

$$q = -\frac{2Vr^3}{EW}\left(\frac{\sin\varphi}{4} + \frac{\cos\varphi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{r^2 F}{\pi(r^2 F + W)}\right),$$

$$p = +\frac{2Vr^3}{EW}\left(\frac{\varphi}{\pi} - \frac{\sin\varphi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{1 - \cos\varphi}{2}\right).$$

Für $\pi < \varphi < 2\pi$ ist in diesen Ausdrücken $\varphi - \pi$ an Stelle von φ zu setzen. Speziell wird[1])

1) Winkler, § 369.

$$(21)\qquad \begin{aligned} q_0 &= -\frac{2Vr^3}{EW}\cdot\frac{(\pi^2-8)r^2F+\pi^2W}{8\pi(r^2F+W)};\\ q_{\frac{\pi}{2}} &= -\frac{2Vr^3}{EW}\cdot\frac{(4-\pi)r^2F-\pi W}{4\pi(r^2F+W)}. \end{aligned}$$

Wir wollen an einem Zahlenbeispiel diese Größen, welche die größte Verlängerung und die größte Verkürzung eines Radius darstellen, vergleichen mit denjenigen, welche die Formeln des § 2 liefern. Wir wählen für den Ring ein solches Material, daß seine elastische Reaktion auf Zug und Druck durch denselben Elastizitätsmodul charakterisiert ist, etwa Stahl. Ferner müssen wir den Voraussetzungen der Rechnung gemäß den Radius des Rings sehr groß wählen gegen die Dimensionen des Querschnitts. Wir setzen dementsprechend

$$r = 1000\text{ mm};\quad b = 1\text{ mm};\quad \varrho = 10\text{ mm};\quad F = 1;\quad W = \tfrac{1}{12};$$
$$E = 24\,000\text{ kgmm}^{-2};\quad E_1 = 20\,000\text{ kgmm}^{-2}.$$

Was die Festsetzung der ursprünglichen Spannung der Zugstangen betrifft, so machen wir die Annahme, das Material des Rings sei so beschaffen, daß eher die Deformation der Zugstangen als die des Rings die Proportionalitätsgrenze[1]) überschreite; wir haben dann bei der Festsetzung der oberen Grenze dieser Spannung nur die Proportionalitätsgrenze der Zugstangen zu berücksichtigen. Wir nehmen sie zu 10 kgmm^{-2} an.[2]) Setzen wir

$$E_1\frac{r-r_2}{r_2-\varrho} = 10,$$

so wird $r - r_2 = 0{,}495$ mm, woraus sich als obere Grenze für a

$$a = 0{,}20212126$$

ergibt. Die untere Grenze für a ergibt sich aus $r = r_2$:

$$a = \frac{mnE_1}{r-\varrho} = 0{,}20202020\ldots$$

Wir wollen sehr nahe an beide Grenzwerte herangehen und noch für einen mittleren Wert die Deformation berechnen. Setzt man

$$\begin{aligned} a_{\min} &= 0{,}2020202021,\\ a &= 0{,}20207,\\ a_{\max} &= 0{,}20212125, \end{aligned}$$

so findet sich α und β annähernd gleich 71; infolgedessen sind die hyperbolischen Funktionen von $\alpha\pi$ nicht mehr von $\frac{1}{2}e^{\alpha\pi}$ zu unterscheiden;

1) Cfr. Bach, Elast. u. Festigk. § 2.
2) Bach, § 9 S. 31, Probestab IVc.

ihnen gegenüber dürfen endliche Größen als verschwindend klein angesehen werden. Dadurch vereinfacht sich die Rechnung bedeutend; es wird

$$q_0 = C' - \frac{A\beta}{t^2}; \qquad q_{\frac{\pi}{2}} = C';$$

$$C' = \frac{4\alpha\beta r^2 EFA}{(ar^4 + EW + r^2 EF)\pi t^4}; \qquad A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW}.$$

Die numerischen Werte der in der Rechnung auftretenden Größen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Urspr. Spannung	minimal	mittel	maximal
a	0,2020202021	0,20207	0,20212125
$r - r_2$	$4 \cdot 10^{-9}$	0,244	0,495
$Z_0 : mn$	$80{,}808081 \cdot 10^{-9}$	4,930508	10
α	70,8843	70,8895	70,8939
β	70,89139	70,8965	70,900957
$q_{\frac{\pi}{2}} : -q_0$	$9{,}5446 \cdot 10^{-4}$	$9{,}5418 \cdot 10^{-4}$	$9{,}5392 \cdot 10^{-4}$
$2V$	$22{,}8188 \cdot 10^{-9}$	1,39224	2,825

Die Längen sind in mm, die Kräfte in kg, die Drucke in kgmm^{-2} ausgedrückt. Die in der letzten Horizontalreihe angegebenen Gewichte $2V$ sind diejenigen, welche bei der jeweiligen ursprünglichen Spannung der Zugstangen genügen, um der Zugstange $\varphi = 0$ ihre ursprüngliche Länge r_2 wieder zu geben.

Fehlen dem Ring die Zugstangen, während alles übrige gleich bleibt, so ergibt sich aus (21)

$$q_{\frac{\pi}{2}} : -q_0 = 0{,}9183.$$

Dieses Verhältnis, beim Ring ohne Zugstangen nahezu gleich 1, wird also durch Anbringen der Zugstangen auf etwa $\frac{1}{1000}$ herabgedrückt.

Was die Größe der Gewichte betrifft, welche die Deformationen hervorrufen, so zeigt die folgende Tabelle, daß dieselbe Verkürzung q_0 bei den Ringen mit Zugstangen ca. $2 \cdot 10^5$mal größere Gewichte erfordert, als bei dem Ring ohne Zugstangen, und daß andererseits dasselbe Gewicht bei dem Ring ohne Zugstangen eine $2 \cdot 10^5$mal größere Verkürzung q_0 hervorbringt, als bei den Ringen mit Zugstangen.

	Ring ohne Zugst.	Ring mit Zugst.		urspr. Spannung
q_0	$0{,}849 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$2V = 22{,}8 \cdot 10^{-9}$	minimal
$2V$	$6{,}56 \cdot 10^{-6}$	1,392	$q_0 = 0{,}244$	mittel
$2V$	$13{,}31 \cdot 10^{-6}$	2,825	$q_0 = 0{,}495$	maximal

Auch bei der in § 3 behandelten Belastungsweise des Rings wird

$$q_0 = C' - \frac{A\beta}{t^2}; \quad q_\pi = C'; \quad A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW};$$

dagegen wird in diesem Fall

$$C' = \frac{2\alpha\beta r^2 EFA}{(ar^4 + EW + r^2 EF)\pi t^4}.$$

Die größte Verlängerung einer Zugstange (q_π) ist also nur halb so groß, wie im Fall des § 2 $\left(q_{\frac{\pi}{2}}\right)$, während die Verkürzung ($-q_0$) fast genau denselben Wert behält. Sie wird nur sehr wenig größer, als bei der früheren Belastungsweise. Infolgedessen werden die Gewichte $2V$, die der Zugstange $\varphi = 0$ ihre ursprüngliche Länge wieder geben, jetzt etwas kleiner sein, als früher. Sie erhalten die Werte

$$22{,}8075 \cdot 10^{-9} \text{ kg}; \quad 1{,}3915 \text{ kg}; \quad 2{,}8236 \text{ kg}.$$

Obgleich wir die Diskussion unserer Resultate nur an einem Zahlenbeispiel durchgeführt haben, wird sich doch folgendes allgemein sagen lassen.

Die Tragfähigkeit eines Rades wird durch Anbringen von Zugstangen erheblich gesteigert, und ist, wenn der Druck im obersten Punkt der Peripherie wirkt, etwas größer, als wenn er an der Nabe angebracht wird; die Tragfähigkeit ist der ursprünglichen Spannung der Zugstangen nahezu proportional, wächst jedoch ein wenig rascher als diese. Die Deformation erfolgt, je stärker die Zugstangen angespannt werden, um so mehr in der Weise, daß sich der Durchmesser, der in die Druckrichtung fällt, verkürzt, ohne daß der Ring seitlich merklich ausweicht.

Nachtrag. Längere Zeit nach Beendigung des Manuskripts wurde ich auf einen Aufsatz von Herrn Linsemann aufmerksam gemacht über „Die elastische Linie von Drehstrommaschinen mit großen Durchmessern“.[1]) Da auch bei diesem Problem die stetig über die Ring-

1) Elektrotechn. Zeitschrift. XXIII. Jahrg. 1902, S. 81 ff.

fläche verteilten magnetischen Zugkräfte lineare Funktionen der radialen Deformation q[1]) sind, die aber, zum Unterschied von den Kräften in den Zugstangen mit wachsendem q *abnehmen*, so werden die Differentialgleichungen für q bei beiden Problemen einander ähnlich. Doch gestalten sich, bei der gänzlichen Verschiedenheit der Aufgabe sowie bei den verschiedenen Integrationsbedingungen und wegen der von Herrn Linsemann gemachten Annahme, daß die Peripherie des Rings ihre ursprüngliche Länge behalte, die endlichen Ausdrücke für q durchaus verschieden.

1) Die radiale Deformation bezeichnet Herr Linsemann mit p, die zu q senkrechte Verschiebung p berechnet er nicht.